Lógica Digital

Organización de computadoras 2019

Universidad Nacional de Quilmes

1 Motivación

El enfoque de Von Neumann se inspira de alguna manera en el aporte de Babbage. ¿Cómo? Se necesita traducir las instrucciones (escritas en algún lenguaje) en acciones. En la máquina analítica de Babagge, la combinación de perforaciones disparaban diferentes acciones, pues codificaban algo que el mecanismo podía traducir. Eso es lo que necesitamos: Codificar las distintas acciones de manera que el mecanismo elegido pueda traducirlo. Por ese tiempo (los años 30), se comenzó a usar el álgebra de Boole para diseñar circuitos de conmutación, para automatizar y formalizar el análisis de los problemas. Al basarse en el álgebra de boole, los circuitos podían describirse mediante un método estructurado.

Suponer un problema que puede describirse mediante la lógica proposicional: *'Yo solo salgo los martes. Si hoy es martes y llueve entonces necesitamos un paraguas'*. Aquí hay dos variables (que pueden ser V o F):

- p: Hoy es martes
- q: Hoy llueve

¿Cómo saber si el paraguas es necesario? Es fácil responderlo, pero si queremos un método a prueba de fallos, lo mejor es hacer una tabla de verdad.

A partir de entonces el funcionamiento de la computadora se basa en el procesamiento y almacenamiento de datos binarios: Verdadero ó Falso, que también se puede ver como 0 ó 1. Entonces se necesitan elementos (dispositivos, aparatos) que puedan almacenar y mantener un valor binario (uno de dos estados) y otros que puedan calcular/procesar información. Esta información no es mas que una combinación de las entradas de los circuitos, es decir: **cadenas de bits**.

Estos dispositivos pueden construirse a partir de la lógica digital, cuyo fundamento matemático es la lógica proposicional ó el álgebra de Boole. Un mecanismo que puedan operar sobre datos (cadenas binarias) y así realizar las funciones elementales de la computadora.

Ya vimos que las proposiciones son enunciados en lenguaje natural que pueden ser verdaderas o falsas. Las proposiciones pueden ser simples, como por ejemplo A="hoy es viernes" o B="hoy está lloviendo"); o pueden ser más complejas, componiendo proposiciones simples, por ejemplo: "hoy es viernes y hoy está lloviendo".

Entonces es necesario construir dispositivos que implementen las funciones lógicas y luego puedan componerse. Las compuertas lógicas elementales son: AND (conjunción-y) (graficar tabla) OR (disyunción - o) (graficar tabla) NOT (Negacion / no)

Las compuertas se conectan entre sí formando circuitos que permiten describir problemas.

2 Cálculo Proposicional

El cálculo proposicional es el estudio de las relaciones lógicas entre objetos llamados proposiciones, que generalmente pueden interpretarse como afirmaciones que tienen algún significado en contextos de la vida real. Para nosotros, una proposición será cualquier frase que pueda ser verdadera o falsa.

- *Está lloviendo* es una proposición
- *¿Cómo te sentís hoy?* no es una proposición
- *El mar y el sónido de las olas* no es una proposición

- *Yo estudio organización de computadoras* es una proposición

En el cálculo proposicional se utilizan letras minúsculas (ej: p, q, r) para simbolizar proposiciones, que se pueden combinar utilizando conectivos lógicos:

1. $\neg$ para "no" o negación
2. $\bullet$ Para "y"
3. $+$ para "o"
4. $\Rightarrow$ para implicación condicional

Veamos el siguiente ejemplo con las proposiciones p, q y r definidas de la siguiente manera:

- p = "está lloviendo"
- q = "el sol está brillando"
- r = "hay nubes en el cielo"

Simbolizamos las siguientes frases:

1. Está lloviendo y el sol está brillando: $p \bullet q$
2. Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo $p \Rightarrow r$
3. Si no está lloviendo, entonces el sol no está brillando y hay nubes en el cielo $\overline{p} \Rightarrow (\overline{q} \bullet r)$

La suposición fundamental del cálculo proposicional consiste en que los valores de verdad de una proposición construida a partir de otras proposiciones quedan completamente determinados por los valores de verdad de las proposiciones originales. Para ello se establecen los valores de verdad según las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones originales, basándonos en las siguientes tablas, considerar 0 como Falso y 1 como verdadero:

A	B	$A \bullet B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La tabla indica que, el conectivo lógico "y" sólo será verdadero cuando ambas proposiciones p y q sean verdaderas.

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La tabla indica que, si al menos una de las proposiciones es verdadera, la proposición formada por el conectivo "o" será verdadera.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Evidentemente, si la proposición p es verdadera, su negación será falsa y viceversa.

Operadores elementales

El álgebra de Boole, como cualquier álgebra, usa variables y operaciones. En particular, las variables y operaciones son lógicas, por lo cual las variables pueden tomar el valor 1 (que representa al valor verdadero) y el 0 (que representa al valor falso).
A continuación un repaso de las tablas de verdad de los operadores clásicos.

Conjunción

p	**q**	$p \bullet q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

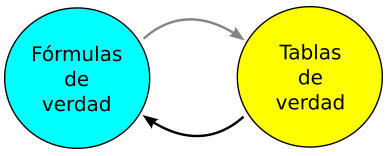
Disyunción

p	**q**	$p + q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Negación

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

De fórmula lógica a tabla de verdad



Una fórmula lógica se puede traducir a una tabla de verdad para obtener como resultado su valor de verdad. A continuación se mostrara como se realiza la traducción.

Consideremos la siguiente formula:

$$(p \bullet q) + p$$

y tomemos en cuenta lo siguiente:

- la cantidad de variables dentro de la fórmula determina la cantidad de filas de la tabla de verdad. En este caso tenemos 2 variables **p** y **q**, por lo tanto vamos se tendrán 4 combinaciones o filas: $2^{cant.variables} = 2^2 = 4$

- las operaciones lógicas que componen la fórmula, en este caso las operaciones **and** y **or**. Es importante tener en mente la tabla de verdad de cada operación, para poder completar la tabla.

El mecanismo para construir la tabla requiere que en primer lugar se completen las combinaciones entre las entradas (p y q en el ejemplo) y luego se evalúa la fórmula de verdad con cada combinación para encontrar el valor final en cada caso.

Tabla de verdad :

p	**q**	$p \bullet q$	$(p \bullet q) + p$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Formas normales

A menudo es útil contar con un mecanismo estructurado para deducir la fórmula de verdad a partir de una tabla de verdad de una relativa complejidad. Para eso presentamos la **suma de productos (SoP)** y el **producto de sumas (PoS)**.

SoP La expresión SOP (*Sium of product*) es una norma de escritura para las fórmula de verdad. Como lo dice su nombre, es una suma (disyunción) de términos que son productos (conjunciones) entre literales. ¿Y que es un literal? Bueno, es una variable o su negación. Para construirla, se debe extraer el término que describe cada caso de la tabla de verdad que verifica la fórmula.

Es decir, cada fila donde la salida vale 1. Con cada uno de esos casos se describe con un término con todas las variables, segun aparezcan afirmadas o negadas. Por ejemplo

p	q	s	
0	0	0	
0	1	1	$\rightarrow \overline{p} \bullet q$
1	0	1	$\rightarrow p \bullet \overline{q}$
1	1	1	$\rightarrow p \bullet q$

Finalmente, los términos se componen con una disyunción: $(\overline{p} \bullet q) + (p \bullet \overline{q}) + (p \bullet q)$

PoS La expresión PoS (*Products of sums*) es una conjunción de disyunciones. A diferencia de la anterior, describe la fórmula a partir de los casos donde no se cumple, algo ası como **"f vale cuando no ocurre el caso ... ni el caso..."**

El primer paso es rescatar los casos donde la formula vale **0**, por ejemplo:

p	q	s	
0	0	0	$\rightarrow \overline{p} \bullet \overline{q}$
0	1	1	
1	0	0	$\rightarrow p \bullet \overline{q}$
1	1	1	

Luego, esos casos se niegan y se unen con conjunción, ya que no debe cumplirse ninguno de ellos: $\overline{(\overline{p} \bullet \overline{q})} \bullet \overline{(p \bullet \overline{q})}$ Finalmente, aplicando la propiedad de De Morgan, los terminos negados se convierten en disyunciones: $(p + q) \bullet (\overline{p} + q)$

3 Logica Digital

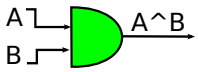
La electrónica digital está fundamentada en la base matemática formada por el álgebra de Boole (George Boole, matemático inglés, 1815 -1864). Este método de análisis considera que todos los elementos poseen únicamente dos estados (biestables) o dos valores, verdadero o falso (1 ó 0) que son opuestos entre sí, no permitiéndose nunca la adopción de estados intermedios. Estudiando las distintas asociaciones entre ellos se obtienen las leyes generales sobre los procesos lógicos. Fue Claude Shannon (matemático e ingeniero norteamericano, 1916 -2001) quien aplicó estas técnicas de estudio, a los circuitos compuestos de elementos que solo pueden adoptar dos estados estables, apareciendo

entonces los llamados circuitos lógicos. Puede decirse entonces que el álgebra de Boole es el sistema matemático empleado en el diseño de circuitos lógicos, que nos permite identificar mediante símbolos el objeto de un circuito lógico de modo que su estado sea equivalente a un circuito físico.

Un circuito lógico es una composición de compuertas que traduce un conjunto de entradas en una salida, de acuerdo a una función lógica, que se actualiza inmediatamente luego de proveerse las entradas.

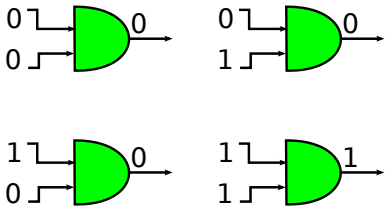
Existe un convenio gráfico para representar dispositivos (electrónicos, hidráulicos, mecánicos, etc.) que lleven a cabo funciones booleanas elementales y que, en función de la combinación o combinaciones diseñadas, se obtendrán funciones más complejas. Las compuertas lógicas son dispositivos electrónicos que desarrollan las funciones booleanas

Conjunción - AND

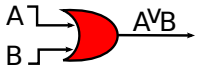


Una compuerta AND tiene dos entradas como mínimo y su operación lógica es un producto entre ambas, no es un producto aritmético, aunque en este caso coincidan. *Observa que su salida será 1 si sus dos entradas están a nivel alto (1)*

Casos:

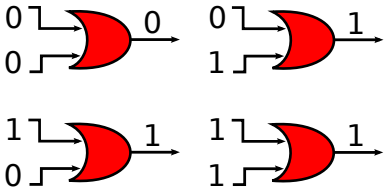


Disyunción: OR

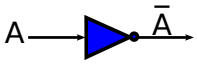


Al igual que la anterior posee dos entradas como mínimo y la operación lógica, será una suma entre ambas. Bueno, todo va bien hasta que $1 + 1 = 1$, el tema es que se trata de una compuerta O Inclusiva es como a y/o b. *Es decir, basta que una de ellas sea 1 para que su salida sea también 1*

Casos:

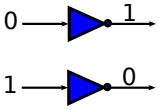


Negación: NOT



Se trata de un inversor, es decir, invierte el dato de entrada, por ejemplo; si se pone su entrada a 1 (nivel alto) se obtiene en su salida un 0 (o nivel bajo), y viceversa. Esta compuerta dispone de una sola entrada. *Su operación lógica es s igual a a invertida*

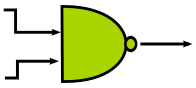
Casos:



Operaciones lógicas adicionales

1. Compuerta **NAND**

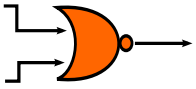
$$a \uparrow b = \overline{a \bullet b}$$



Responde a la inversión del producto lógico de sus entradas, en su representación simbólica se reemplaza la compuerta NOT por un círculo a la salida de la compuerta AND.

2. Compuerta **NOR**

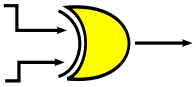
$$a \downarrow b = \overline{a + b}$$



El resultado que se obtiene a la salida de esta compuerta resulta de la inversión de la operación lógica o inclusiva es como un no a y/o b. Igual que antes, solo agregas un círculo a la compuerta OR y ya tienes una NOR.

3. Compuerta **XOR**

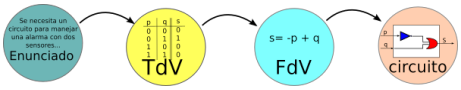
$$a \oplus b = (\overline{a} \bullet b) + (a \bullet \overline{b})$$



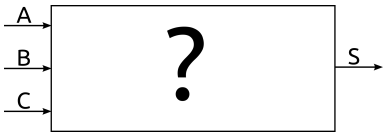
Es OR EXclusiva en este caso con dos entradas (puede tener más) y lo que hará con ellas será una suma lógica entre a por b invertida y a invertida por b.*Al ser O Exclusiva su salida será 1 si una y sólo una de sus entradas es 1*

4 Diseño de circuitos

¿Cómo se construyen los circuitos? A partir de su fórmula de verdad ¿Y como se llega a la fórmula? En general se cuenta con una descripción del problema a través de un enunciado en lenguaje natural (informal), que debe ser abstraido (formalizado) en una tabla de verdad, para luego ser convertida en una fórmula de verdad y luego en un circuito.



Por ejemplo, se necesita un circuito de 3 entradas y una salida que compute la función "mayoría". Es decir, que si dos o más entradas valen 1, la salida debe valer 1, y un 0 en caso contrario. Para entender lo que se pide, es útil dibujarlo como una caja negra:



Y luego plantear la tabla de verdad:

A	B	C	Mayoría
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Usando el método SoP, se obtiene la fórmula:

$$(\overline{A} \bullet B \bullet C) + (A \bullet \overline{B} \bullet C) + (A \bullet B \bullet \overline{C}) + (A \bullet B \bullet C)$$

Finalmente, dibujar el circuito: