

PROCESOS Y MÁQUINAS INDUSTRIALES II

CLASE II

Prof. Mariana Suarez

- 1 Ecuaciones constitutivas
- 2 Estabilidad
- 3 Integración numérica de EDO's

Ecuaciones constitutivas

- Relacionan magnitudes del sistema entre sí, permitiendo integrar las ecuaciones dinámicas.
- Describen física/químicamente al sistema.

Ejemplo: conducción del calor

q'' : flujo de calor (magnitud dinámica)

T : temperatura (variable de estado.)

✓ Ecuación de Fourier:

$$q'' = k \frac{dT}{dx}$$

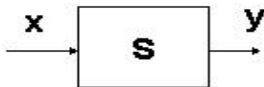
✓ k : conductividad térmica (parámetro).

✓ Identificación del sistema: proceso para determinar el valor de los parámetros.

✓ Se realiza: $\left\{ \begin{array}{l} \text{midiendo (experimentalmente)} \\ \text{calculando (analítica o numericamente)} \end{array} \right.$

Algunas definiciones

Analicemos un sistema representado por el siguiente diagrama de bloques.



Algunas definiciones

Estabilidad externa(estabilidad *bibo*, bounded input - bounded output)

entradas acotadas $\Rightarrow$ salidas acotadas

Algunas definiciones

Definición: S es externamente estable (*bibo*), si

$$\forall u : \| u(t) \| \leq M_1 \quad -\infty < -T \leq t \leq \infty$$

la salida correspondiente y verifica que

$$\| y(t) \| \leq M_2 \quad -T \leq t \leq \infty$$

Proposición(sin dem.):

S es bibo estable $\iff$ la respuesta impulsiva $h(t)$ cumple

$$\int_0^{\infty} \|h(t)\| dt \leq M < \infty$$

Problemas de la estabilidad *bibo*:

- no considera perturbaciones internas del sistema que pueden inestabilizarlo.
- vale sólo para condiciones iniciales nulas.

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Equilibrio de un sistema

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2)$$

para el cual existe una solución $\phi(t, x_0) = x(t)$, única.

Entonces, x_e es un equilibrio de (1) si $f(x_e) = 0$.

✓ Observación: Si x_e es equilibrio de (1),

$$\phi(t, x_e) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Estabilidad de Lyapunov.

Un equilibrio x_e de (1) es estable si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \text{ tal que si}$$

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Estabilidad asintótica.

Un equilibrio de (1) es asintóticamente estable si dados $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, ($\mu < \varepsilon$) existen $\delta, T > 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \|x_0 - x_e\| < \delta &\Rightarrow \|\phi(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \\ &\text{y} \quad \|\phi(t, x_0) - x_e\| < \mu \quad \forall t \geq T. \end{aligned}$$

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Estabilidad interna

El sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3)$$

$$y = Cx \quad (4)$$

es internamente estable si $x(t)$, solución de

$$\dot{x} = Ax \quad (5)$$

$$x(0) = x_0 \quad (6)$$

cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \forall x_0$$

$\mapsto$ sistema asintóticamente estable en el origen.

Proposición (sin demostración):

El sistema (5) es internamente estable $\iff$ la matriz A es Hurwitz.

Nota: A Hurwitz $\longrightarrow$ todos sus autovalores con parte real negativa.

Sistema internamente estable $\implies$ externamente estable.

Algoritmos para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)

- explícitos
- implícitos

Problemas:

- exactitud
- estabilidad numérica
- velocidad

Algoritmos para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias(EDO's)

Tamaño del intervalo de integración

- No suficientemente pequeño
 - 1 solución no sufic. exacta
 - 2 inestabilidad numérica
- Intervalo muy pequeño $\rightarrow$ aumenta tiempo de integración.

✓ Además: mayor número de EDO's $\rightarrow$ mayor tiempo.

Algoritmos explícitos para integración numérica

- 1 Euler
- 2 Runge-Kutta orden 4

Método de Euler

Sea la EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

con $f(x, t)$ no lineal, y la cond. inicial $x(0) = x_0$, para $t = 0$.
Nos movemos hacia adelante en el tiempo un pequeño intervalo Δt

Para $t = t_1 = \Delta t$, se estima un nuevo valor de x , $x(\Delta t)$, por extrapolación lineal.

Entonces

$$\begin{aligned} x(\Delta t) &= x(0) + \frac{dx}{dt} \Delta t \\ x_1 &= x_0 + f(x_0, 0) \Delta t \end{aligned} \tag{7}$$

Método de Euler

Sea ahora $t = t_2 = 2\Delta t$, $x(2\Delta t) = x_2$.

$$\begin{aligned}x(2\Delta t) &= x(\Delta t) + \frac{dx}{dt} \Delta t \\x_2 &= x_1 + f(x_1, t_1) \Delta t\end{aligned}\tag{8}$$

Generalizando al paso $n + 1$,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + f(x_n, t_n) \Delta t \\t_{n+1} &= t_n + \Delta t\end{aligned}\tag{9}$$

✓ Ventaja de Euler: fácil de programar.

Método de Euler

Sea el sistema de dos EDO's:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, t)\end{aligned}$$

Los algoritmos de integración de Euler quedarán:

$$\begin{aligned}x_{1,n+1} &= x_{1,n} + f_1(x_{1,n}, x_{2,n}, t_n) \Delta t \\ x_{2,n+1} &= x_{2,n} + f_2(x_{1,n}, x_{2,n}, t_n) \Delta t\end{aligned}\tag{10}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Sea la EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

con $f(x, t)$ no lineal, y la cond. inicial $x(0) = x_0$, para $t = 0$.

Se definen:

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t f(x_n, t_n) \\k_2 &= \Delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\k_3 &= \Delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\k_4 &= \Delta t f(x_n + k_3, t_n + \Delta t) \\x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}\tag{11}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Para integrar dos EDO's

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, t)\end{aligned}$$

Comparación Euler-Runge Kutta

- Si se requiere exactitud $\rightarrow$ Runge-Kutta.
A igual tiempo de computación, R-K más exacto.
- Si no se requiere exactitud $\rightarrow$ Euler.
Euler es tan estable como R-K, pero más rápido.